Chapitre II:Variables aléatoires

Plan :



Introduction

En pratique, on s'intéresse à certaines quantités attachées aux résultats obtenus à l'issue d'une expérience aléatoire. Pour modéliser cela, on introduit la notion de variables aléatoires. Ce sont des fonctions qui dépendent du hasard, celui-ci étant modélisé par le tirage d'un point $\omega \in \Omega$.

Lois de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{B})$ un espace probabilisable. Toute application mesurable X de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $(E, \mathcal{B})$, (c-à-d : $\forall\ B \in \mathcal{B}\ : X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$), est appelée une variable aléatoire, (notée v.a).

Lois de probabilité d'une variable aléatoire

Remarque

- **L'événement** $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in B\}$ **est noté par :** $(X \in B)$**.**
- **La tribu engendrée par** X **est définie par :**
  $\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{X^{-1}(B) \ : \ B \in \mathcal{B}\right\}$.

Lois de probabilité d'une variable aléatoire

Notations :

On étudie le plus souvent les v.a quand l'espace d'arrivée est souvent :

- **Si** $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$**, alors l'application** X **est dite variable aléatoire réelle (v.a.r). Dans ce cas, pour tout intervalle** I **de** $\mathbb{R}$**, on a** $(X \in I) \in \mathcal{A}$**. De plus, pour tout réel** x**, on note** $(X \leq x) = \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \leq x\} = X^{-1}\Big(]-\infty, x]\Big)$**.**
- **Si** $(E, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$**, l'application** X **est dite vecteur aléatoire.**
- **Si** E **est au plus dénombrable et** $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$**, l'application** X **est dite variable aléatoire discrète, (notée v.a.d).**

Lois de probabilité d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une v.a de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $(E, \mathcal{B})$. On appelle loi de probabilité de X et on la note P_X, la probabilité image de P par X définie sur $(E, \mathcal{B})$ par :

$$\forall\, B \in \mathcal{B} \ : \quad P_X(B) = P(X^{-1}(B)).$$

Proposition

$(E, \mathcal{B}, P_X)$ est un espace probabilisé.

Lois de probabilité d'une variable aléatoire

Preuve

- $\forall\, B \in \mathcal{B}\ :\ P_X(B) = P(X^{-1}(B)) \Longrightarrow 0 \leq P_X(B) \leq 1.$
- $P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = P(\Omega) = 1.$
- **Soit $(B_n)_n$ une suite des événements deux à deux disjoints dans $\mathcal{B}$, alors**

$$P_X\Big(\bigcup_n B_n\Big) = P\Big(X^{-1}\Big(\bigcup_n B_n\Big)\Big) = P\Big(\bigcup_n \Big(X^{-1}(B_n)\Big)\Big)$$

$$= \sum_n P\Big(X^{-1}(B_n)\Big) = \sum_n P_X(B_n),$$

car P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Espérance d'une variable aléatoire

Définition

Soit X une v.a de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $(E, \mathcal{B})$ et g une application mesurable de $(E, \mathcal{B})$ vers $\mathbb{R}$. Si $g(X)$ est dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, (c-à-d : $g(X)$ est intégrable), alors l'espérance de $g(X)$ est définie par :

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\Omega} g(X)dP.$$

Espérance d'une variable aléatoire

Théorème de transfert

Soit X une v.a de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers $(E, \mathcal{B})$ et de loi de probabilité P_X et g une application mesurable de $(E, \mathcal{B})$ vers $\mathbb{R}$. Si $g(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega) = \int_\mathbb{R} g(x)dP_X(x).$$

Loi conjointe et lois marginales

Définition

Soit $(X_i)_{i\in[1:n]}$ une suite de v.a définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs respectivement dans $(E_i, \mathcal{B}_i)_{i\in[1:n]}$.

- **On appelle loi conjointe du vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)$ la loi image P_X de X sur l'espace produit $(E_1 \times ... \times E_n, \mathcal{B}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{B}_n)$.**
- **La loi P_{X_i} de chacune des v.a X_i est alors appelée loi marginale.**

Indépendance des variables aléatoires

Définition

Soit $(X_i)_{i\in[1:n]}$ **une suite de v.a sur le même espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **et à valeurs respectivement dans** $(E_i, \mathcal{B}_i)_{i\in[1:n]}$**. La famille** $(X_i)_{i\in[\mathbf{1}:n]}$ **est dite indépendante ssi : pour tous** $(B_i)_{i\in[1:n]}$ **où** $B_i \in \mathcal{B}_i$**, pour tout** $i \in [1:n]$**, on a**

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i \in B_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i),$$

ou encore

$$P_{(X_1,\dots,X_n)}\left(B_1 \times \dots \times B_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(B_i).$$

C-à-d : la loi conjointe P_X **du vecteur** X **est le produit des lois marginales** P_{X_i} **:**

$$P_X = P_{X_1} \otimes \dots \otimes P_{X_n}.$$



Indépendance des variables aléatoires

Théorème

La suite $(X_i)_{i\in[1:n]}$ est indépendante ssi pour toutes applications g_i de $(E_i,\mathcal{B}_i)$ vers $(\mathbb{R},\mathcal{B}_\mathbb{R})$, mesurables et bornées, on a

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(g_i(X_i)).$$

Indépendance des variables aléatoires

Preuve

- **Sens direct : Supposons que les $(X_i)_{i\in[1:n]}$ sont indépendantes. Considérons les n applications mesurables g_i de $(E_i, \mathcal{B}_i)$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Notons.**

$$E\Big(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\Big) = E\Big(g(X_1, ..., X_n)\Big),$$

avec $g(x_1, ..., x_n) = g_1(x_1) \times ... \times g_n(x_n)$. L'égalité de la loi conjointe et du produit tensoriel des lois marginales nous donne :

$$E\Big(g(X_1, ..., X_n)\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, ..., x_n) dP_{(X_1,...,X_n)}(x_1, ..., x_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, ..., x_n) d\{P_{X_1} \otimes ... \otimes P_{X_n}\}(x_1, ..., x_n).$$

Indépendance des variables aléatoires

De là, on applique le théorème de Fubini :

$$E\Big(g(X_1,...,X_n)\Big) = \int_{\mathbb{R}} dP_{X_1}(x_1)... \int_{\mathbb{R}} dP_{X_{n-1}}(x_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} g(x_1,...,x_n) dP_{X_n}(x_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dP_{X_1}(x_1)... \int_{\mathbb{R}} dP_{X_{n-1}}(x_{n-1}) \int_{\mathbb{R}} g_1(x_1)...g_n(x_n) dP_{X_n}(x_n)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g_1(x_1) dP_{X_1}(x_1) \times ... \times \int_{\mathbb{R}} g_n(x_n) dP_{X_n}(x_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} g_i(x_i) dP_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} E(g_i(X_i)).$$

Indépendance des variables aléatoires

- **Sens inverse : Considérons des $B_i \in \mathcal{B}_i$ et posons :** $g_i(X_i) = 1_{B_i}(X_i) = 1_{(X_i \in B_i)}$, **alors** $E(g_i(X_i)) = P(X_i \in B_i)$. **De même :**

$$\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i) = \prod_{i=1}^{n} 1_{(X_i \in B_i)} = 1_{(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n)} = 1_{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X_i \in B_i)\right)}.$$

Finalement

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in B_i)\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(g_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} P((X_i \in B_i).$$

Indépendance des variables aléatoires

Proposition

Pour tout $i \in [1:n]$, les fonctions g_i sont mesurables de $(E_i, \mathcal{B}_i)$ vers $(E_i^{'}, \mathcal{B}_i^{'})$, alors l'indépendance des v.a $(X_i)_{i\in[1:n]}$ entraîne celle des v.a $(g_i(X_i))_{i\in[1:n]}$.

Indépendance des variables aléatoires

Preuve

Pour toute famille $(B_i^{'})_{i\in[1:n]}$ **ou** $B_i \in \mathcal{B}_i^{'}$**, pour tout** i **et par mesurabilité des** g_i**, on a :** $g_i^{-1}(B_i^{'}) = B_i \in \mathcal{B}_i$**. Il vient alors :**

$$\Big(g_i(X_i)\Big)^{-1}(B_i^{'}) = X_i^{-1}\Big(g_i^{-1}(B_i^{'})\Big) = X_i^{-1}(B_i).$$

Par conséquent

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big(g_i(X_i) \in B_i^{'}\Big)\Big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big(g_i(X_i)\Big)^{-1}(B_i^{'})\Big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big(X_i^{-1}(B_i)\Big)\Big)$$

$$= P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\Big(X_i \in B_i\Big)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) = \prod_{i=1}^{n} P(g_i(X_i) \in B_i^{'}),$$

et les v.a $(g_i(X_i))_{i\in[1:n]}$ **sont bien indépendantes.**



Exemples

1. **Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes, alors X^2 et $\exp(Y)$ le sont encore.**
2. **Si X, Y, Z, T et V sont cinq v.a.r indépendantes et si f est mesurable de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$, alors X et $U = f(Y, Z, T)$ sont indépendantes. De même $X, g(Y, Z)$ et $h(T, V)$ sont indépendantes pour des fonctions g et h mesurables de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.**

Variables aléatoires réelles

Le théorème de Radon-Nikodym

Définition

Soient μ et ν deux mesures sur $(E, \mathcal{A})$. On dit que :

- ν **est absolument continue par rapport à** μ **(notation** $\nu \ll \mu$ **) si**

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

- ν **est étrangére à** μ **(notation** $\nu \perp \mu$**) s'il existe** $N \in \mathcal{A}$ **tel que** $\mu(N) = 0$ **et** $\nu\left(N^c\right) = 0$

Le théorème de Radon-Nikodym

Théorème(Radon-Nikodym)

Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur $(E, \mathcal{A})$. Il existe alors un unique couple (ν_a, ν_s) de mesures σ -finies sur $(E, \mathcal{A})$ telles que

- $\nu = \nu_a + \nu_s$
- $\nu_a \ll \mu$ **et** $\nu_s \perp \mu$

De plus, il existe une fonction mesurable $g : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \nu_a(A) = \int_A g d\mu$$

et la fonction g est unique à un ensemble de μ -mesure nulle prés.

Fonction de répartition et densité de probabilité

Définition

Soit X une v.a.r définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et de loi de probabilité P_X. La fonction de répartition de X notée F_X est une application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P_X\Big(]-\infty, x]\Big).$$

Fonction de répartition et densité de probabilité

Remarque

- **Si** P_X **est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité** f_X**, (au sens de Radon-Nikodym :** $dP_X(x) = f_X(x)dx$**), alors**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

- **Si** P_X **est absolument continue par rapport à la mesure de comptage** $\mu = \sum_n \delta_n$ **et de densité** $P_X(x) = P(X = x)$**, alors**

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} P(X = y).$$

Fonction de répartition et densité de probabilité

Propriétés

- F_X **est à valeurs dans** $[0, 1]$**,**
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ **et** $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$,
- F_X **est croissante, continue à droite et admet une limite à gauche,**
- **La fonction de répartition caractérise la loi : deux v.a.r ont la même loi ssi ils ont la même fonction de répartition.**

Fonction de répartition et densité de probabilité

Proposition

Si X est une v.a à densité f_X, alors

- **f_X est positive sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$,**
- **Pour tout réel x, $P(X = x) = 0$,**
- **Pour tout $I \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $P_X(I) = P(X \in I) = \int_I f_X(x)dx$,**
- **En particulier, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$,**
- **Pour tous réels a, b, $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$,**
- **Si f_X est continue, alors F_X est p.s dérivable et on a :**

$$F_X'(x) = f_X(x).$$



Variables aléatoires

- Lois discrètes usuelles :

Nom	Loi
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=0)$
binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\forall 0\leq k\leq n,\ \mathbb{P}(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n)=\exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}$
géométrique $\mathcal{G}eo(p)$	$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}$

- Densités usuelles sur $\mathbb{R}$:

Nom	Densité
uniforme $\mathcal{U}[a,b]$	$\frac{1}{b-a}\,1_{[a,b]}(x)$
exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda\exp(-\lambda x)1_{\{x\geq 0\}}$
normale $\mathcal{N}_1(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$
Cauchy $\mathcal{C}(a)$	$\frac{a}{\pi}\,\frac{1}{x^2+a^2}$

Fonction de répartition et densité de probabilité

Exemple 1

On considère une expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie. L'ensemble des résultats possibles est :
$\Omega = \{(P,P),(F,P),(P,F),(F,F)\}$**.**
Considérons la v.a.d X représentant le nombre de faces obtenues. Les valeurs prises par X sont : $X(\Omega) = \{0,1,2\}$. La loi de probabilité de X est donnée par :

$$P_X(0); \quad P_X(1); \quad P_X(2).$$

Fonction de répartition et densité de probabilité

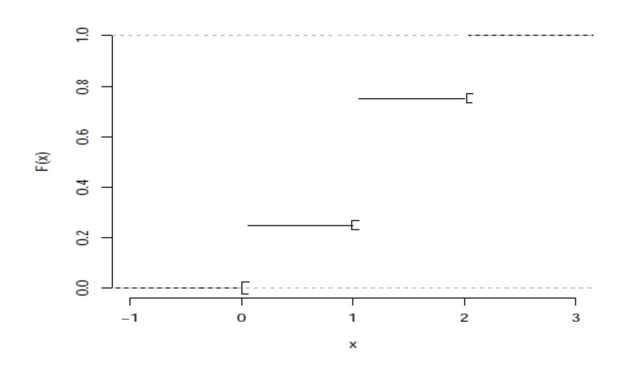
On a

$$P_X(0) = P(X = 0) = P(\{PP\}) = \tfrac{1}{4},$$
$$P_X(1) = P(X = 1) = P(\{PF\}, \{FP\}) = \tfrac{1}{2},$$
$$P_X(2) = P(X = 2) = P(\{FF\}) = \tfrac{1}{4}.$$

Par suite,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P(X = 0) = \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Fonction de répartition et densité de probabilité

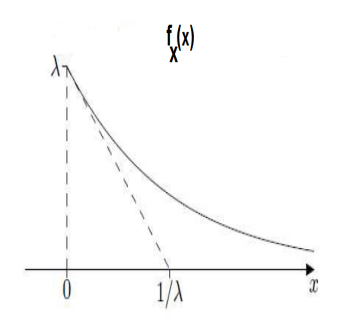


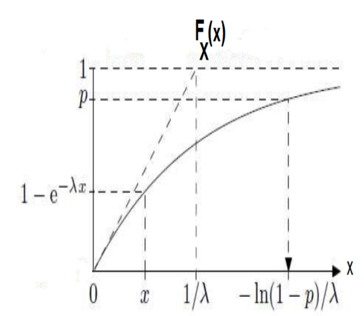
Fonction de répartition et densité de probabilité

Exemple 2

- **Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors quand $x > 0$, on a**

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_0^x \lambda \exp(-\lambda t)dt = 1 - \exp(-\lambda x).$$





Fonction de répartition et densité de probabilité

Exemples de calcul des lois de probabilités

- **1) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ deux v.a.d indépendantes. Le théorème des probabilités totales pour la partition : $\Omega = \bigcup(X = x)$, et la formule du binôme nous donnent la loi de la somme $Z = X + Y$:**

$$P(Z = z) = \sum_{x=0}^{z} P(X = x)P(Y = z - x)$$

$$= \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu}\lambda^{z-x}}{(z-x)!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^{z}}{z!}.$$

Finalement on reconnaît la loi : $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.



Fonction de répartition et densité de probabilité

- **2) Soit X une v.a sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à densité f_X et de fonction de répartition F_X et $Y = aX + b$, alors**

$$a > 0 \Rightarrow F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

$$a < 0 \Rightarrow F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

En dérivant, on obtient la densité de Y :

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Variables aléatoires

Définition

- **Si** $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **(c-à-d :** X **est intégrable), alors on définit l'espérance de** X **par le nombre :**

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega XdP = \int_\mathbb{R} xdP_X(x).$$

- **Si** $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **, (c-à-d :** X **est de carré intégrable), alors on définit la variance de** X **par :**

$$V(X) = E\Big((X - E(X))\Big)^2.$$

- **Si** $X \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **,** $(p \geq 1)$**, alors** $E(|X|^p)$ **est le moment d'ordre** p **de** X**.**



Moments d'une variable aléatoire réelle

Propriétés

1) Si X est une v.a intégrable. Alors

- **Positivité : si $X \geq 0$ p.s, alors $E(X) \geq 0$.**
- **Croissance : si $X \leq Y$ p.s, alors $E(X) \leq E(Y)$.**
- **Linéarité : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ pour tous réels a et b.**
- **Si $X = a$, alors $E(X) = a$.**
- $\forall A \in \mathcal{A},\ E(1_A) = P(A)$.
- **Inégalité de Jensen : Soit g est une fonction définie sur un intervalle de $I \subset \mathbb{R}$, convexe et continue. Si X est une v.a à valeurs dans I telle que $E(X)$ existe, alors**
$$g\Big(E(X)\Big) \leq E\Big(g(X)\Big).$$
En particulier : $|E(X)| \leq E|X|$.

Moments d'une variable aléatoire réelle

2) Si de plus X et Y sont de carré intégrable, alors

- $V(X) \geq 0$.
- $V(X) = 0$ ssi $X = 0$ ***p.s.***
- **Formule de Koenig :** $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- **Pour tous réels a et b,** $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.
- **Si on pose :**

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}, \quad (\sigma(X) \text{ l'écart type})$$

alors $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$. On dit que Y est une v.a centrée réduite.

Moments d'une variable aléatoire réelle

Proposition

1. **Si** P_X **est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité** f_X**, alors**

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx,$$

et on a $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$.

2. **Si** P_X **est absolument continue par rapport à la mesure de comptage et de densité** $P_X(x) = P(X = x)$**, alors**

$$E(g(X)) = \sum_{x=0}^{+\infty} g(x) P_X(x),$$

et on a $\sum_{x=0}^{+\infty} P_X(x) = 1$.

Moments d'une variable aléatoire réelle

Exemples

1. **Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors**

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x P_X(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda.$$

2. **Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

$$V(X) = E\Big((X - E(X)\Big)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(x - E(X)\Big)^2 f_X(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda \Big(x - \frac{1}{\lambda}\Big)^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Moments d'une variable aléatoire réelle

Théorème : Identification de densité

La v.a X est de densité f_X ssi pour toute fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx.$$

Moments d'une variable aléatoire réelle

Exemple

Pour $Y = aX + b$ et $a > 0$. Le changement de variable $y = ax + b$ nous donne :

$$E(g(Y)) = E(g(aX + b)) = \int_{\mathbb{R}} g(ax + b) f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(y) f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{dy}{a}.$$

D'autre part, on a

$$E(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f_Y(y) dy.$$

Par conséquent

$$f_Y(x) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

On fait de même pour $a < 0$.



Variables aléatoires

Définition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ **une v.a.d à valeurs entières. On appelle fonction génératrice de** X **la fonction** $g_X : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ **définie par :**

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P(X = n).$$

Fonction génératrice des moments

Exemple

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ **alors** $X(\Omega) = \{0, 1\}$ **et** $\forall x \in \{0, 1\}$ **:** $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$**.**
Par conséquent

$$g_X(s) = E(s^X) = \sum_{n=0}^{1} s^n P(X = n) = s^0 \times P(X = 0) + s^1 \times P(X = 1) = 1 - p + sp.$$

Fonction génératrice des moments

Propriétés

1. g_X est de C^∞ sur $]-1,1[$ et continue sur $[-1,1]$. Si on note $g_X^{(n)}$ sa dérivée d'ordre n, alors

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

2. La fonction génératrice d'une v.a entière caractérise sa loi :
   Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi ssi
   $\forall\ s \in [-1,1], \quad g_X(s) = g_Y(s)$.
3. $E(X) = g_X^{'}(1)$ et $V(X) = g_X^{''}(1) + g_X^{'}(1) - (g_X^{'}(1))^2$.

Fonction génératrice des moments

Preuve

- **Puisque** $s \in [-1,1]$ **alors** $|s^n P(X=n)| \leq P(X=n)$ **et par suite on a convergence normale des series car** $\sum_n P(X=n) = 1 < +\infty$. **Finalement** g_X **est de** C^∞ **sur** $]-1,1[$ **et continue sur** $[-1,1]$ **et le développement en série entière de la fonction** g_X **termine la preuve de ce point.**
- **Conséquence immediate du fait que** $P(X=n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- **Il suffit de remarquer que :**

$$g_X^{'}(s) = \left(E(s^X)\right)^{'} = E\left(Xs^{X-1}\right),$$

$$g_X^{''}(s) = \left(E(s^X)\right)^{''} = E\left(X(X-1)s^{X-2}\right).$$

Fonction génératrice des moments

Exemple

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$**, on a trouvé que** $g_X(s) = 1 - p + sp$. **Donc** $g_X^{'}(s) = p$ **et** $g_X^{''}(s) = 0$**, par suite**

- $P(X = 0) = \frac{g_X^{(0)}(0)}{0!} = g_X(0) = 1 - p$,
- $P(X = 1) = \frac{g_X^{'}(0)}{1!} = p$,
- $E(X) = p$,
- $E(X(X-1)) = 0$,
- $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = p(1-p)$.

Fonction génératrice des moments

Proposition

- **Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n v.a entières indépendantes alors**

$$\forall\ s \in [-1, 1], \quad g_{X_1+\ldots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s).$$

- **En particulier, si $X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ sont indépendantes alors**

$$\forall\ s \in [-1, 1], \quad g_{X+Y}(s) = g_X(s) \times g_Y(s).$$

Fonction génératrice des moments

Exemple

Soit $X_1, ..., X_n$ n v.a indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Pour tout $s \in [-1, 1]$, on a

$$g_{X_1+\ldots+X_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s) = (1 - p + sp)^n.$$

Il est clair que $X_1 + ... + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Ceci montre que la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est la somme de n v.a indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Variables aléatoires discrètes

Les résultats suivants qui seront démontrés au TD.

Nom	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	$g_X(s)$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=0)$	p	$p(1-p)$	$1-p+ps$
binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\forall 0\leq k\leq n,\ \mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+ps)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n)=\exp(-\lambda)\frac{\lambda^n}{n!}$	λ	λ	$e^{\lambda(s-1)}$
géométrique $\mathcal{G}eo(p)$	$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=n)=p(1-p)^{n-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{ps}{1-(1-p)s}$

Fonction caractéristique

Définition

La fonction caractéristique d'une v.a est définie par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_\Omega e^{itX(\omega)} dP(\omega)$$

$$= \int_\mathbb{R} e^{itx} dP_X(x), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fonction caractéristique

Remarque

- φ_X est la transformée de Fourier de la mesure de probabilité de X. Elle a cependant l'inconvénient de faire appel à la théorie des fonctions d'une v.a complexe.
- Si X est une v.a à valeurs entières, la fonction caractéristique φ_X apparaît comme le prolongement de la fonction génératrice des moments g_X sur le cercle unité complexe et on a $\varphi_X(t) = g_X(e^{it})$.
- Dans le cas d'une v.a.d à valeurs dans E, on a

$$\varphi_X(t) = \sum_{x \in E} e^{itx} P(X = x), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fonction caractéristique

- **Si la loi de la v.a X possède une densité f_X, alors la fonction caractéristique s'obtient par l'intégrale :**

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)dx, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, on a la formule d'inversion :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t)dt.$$

Fonction caractéristique

Propriétés

- $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\quad |\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0) = 1.$
- $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $\quad \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(-t).$
- **Linéarité :** $\varphi_{aX}(t) = \varphi_X(at)$ **et** $\varphi_{X+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(t)$, $\forall$ $a, b \in \mathbb{R}$.
- **Si** $U = \frac{X-m}{\sigma}$ **est la v.a centrée réduite associée à la v.a X, alors**

$$\varphi_U(t) = e^{-i\frac{tm}{\sigma}}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) \quad \textbf{et} \quad \varphi_X(t) = e^{itm}\varphi_U(\sigma t).$$

- **Si X et Y sont deux v.a indépendantes alors** $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.
- **La fonction** φ_X **est uniformément continue pour toutes les valeurs** $t \in \mathbb{R}$.

Fonction caractéristique

Preuve

- On a

$$|\varphi_X(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{itx}| dP_X(x) = \int_{\mathbb{R}} dP_X(x) = P_X(\mathbb{R}) = 1.$$

- On peut écrire :

$$\varphi_X(-t) = E(e^{-itX}) = E(\overline{e^{itX}}) = \overline{E(e^{itX})} = \overline{\varphi_X(t)}.$$

- $\varphi_{aX}(t) = E(e^{itaX}) = E(e^{i(ta)X}) = \varphi_X(at)$.
  $\varphi_{X+b}(t) = E(e^{it(X+b)}) = E(e^{itb}e^{itX}) = e^{itb}E(e^{itX})$.
- Il suffit de prendre dans le point (3) : $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = -\frac{m}{\sigma}$.
- Puisque X et Y sont indépendantes, alors
  $\varphi_{X+Y}(t) = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E(e^{itX}) \times E(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Fonction caractéristique

- **Pour tout** $t, h \in \mathbb{R}$**, on a**

$$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = \left|E\left(e^{itX} e^{it\frac{hX}{2}} \left(e^{it\frac{hX}{2}} - e^{-it\frac{hX}{2}}\right)\right)\right|$$
$$= \left|E\left(e^{itX} e^{it\frac{hX}{2}} 2i \sin\left(\frac{hX}{2}\right)\right)\right|$$
$$\leq E\left|\sin\left(\frac{hX}{2}\right)\right| \leq E(|h||X| \wedge 2),$$

car $|\sin(x)| \leq |x| \wedge 1$**. Par convergence dominée la limite est 0 quand** $h \to 0$**, indépendamment de** t**, ce qui garantit l'uniforme continuité de** φ_X**.**

Variables aléatoires à densités

Proposition

- **Si $E|X|^p$ est finie pour un entier $p \geq 1$, alors φ_X est continûment dérivable jusqu'à l'ordre p et on a $\varphi_X(0) = 1$ et $\varphi_X^p(0) = i^p E(X^p)$.**
- **Si φ_X est de classe C^∞, alors**

$$\varphi_X(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} i^p E(X^p).$$

- **La fonction caractéristique d'une v.a détermine sans ambiguïté sa loi de probabilité : Deux v.a ayant la même fonction caractéristique ont la même loi de probabilité. D'où le nom : (caractéristique).**

Variables aléatoires à densités

Preuve

- Calcul simple des dérivées à l'intérieur de l'espérance.
- Utiliser la formule de Mac-Laurin.
- Conséquence du point (1), ou de la formule d'inversion :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Variables aléatoires à densités

Lois usuelles continues

Nom et Symbole	Support	Densité $f_X(x)$	Fonction caractéristique
Loi uniforme $U[a,b]$ $[a,b] \subset \mathbb{R}$	$[a,b]$	$\frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$	$\frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$
Loi normale ou de Gauss $N(m,\sigma^2)$ $m \in \mathbb{R},\ \sigma \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Loi gamma $G(\alpha,\lambda)$ $\alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}$	$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
Loi exponentielle $\exp(\lambda) = G(1,\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$	$\mathbb{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}}$

Variables aléatoires à densités

Exemple 1 : Moments de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

D'après le tableau précédant on a

$$\varphi_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2!}\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)^2 + \ldots\ldots$$

On identifie à la formule de la proposition précédente, on obtient

- **les moments d'ordre impair sont nuls,**
- **les moments d'ordre pair sont égaux à $\frac{(2k)!}{2^k k!}$.**

Variables aléatoires

Exemple 2 :

X et Y sont deux v.a normales, indépendantes et de paramètres m_1, σ_1^2 pour X et m_2, σ_2^2 pour Y. La fonction caractéristique de leur somme $Z = X + Y$ est :

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{it(m_1+m_2)}e^{-t^2\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}.$$

On déduit que la somme de deux v.a normales indépendantes est une v.a normale de paramètres $m = m_1 + m_2$ et $\sigma = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Extensions à des vecteurs aléatoires

Fonction de répartition et densité

Définition

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire de loi de probabilité P_X. La fonction de répartition conjointe de X, notée F_X, est une application définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $[0, 1]$ par :

$$F_X(x) = P_X\Big(]-\infty, x_1] \times .....\times]-\infty, x_n]\Big) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq x_i)\Big),$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Extensions à des vecteurs aléatoires

Propriétés

- $\lim_{\forall\, i, x_i \to -\infty} F_X(x) = 0$ **et** $\lim_{\forall\, i, x_i \to +\infty} F_X(x) = 1,$
- **La fonction de répartition conjointe du vecteur aléatoire X permet de déterminer les fonctions de répartition de toutes les marginales (sous vecteurs) de X.**

Extensions à des vecteurs aléatoires

Exemples

Pour tout $i \in [1 : n]$, **on a**

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{\forall\ j \neq i, x_j \to +\infty} F_X(x) \quad \textbf{et} \quad F_{(X_i, X_j)}(x_i, x_j) = \lim_{\forall\ k \neq i, k \neq j, x_k \to +\infty} F_X(x),$$

et ainsi de suite pour les autres marges.

Extensions à des vecteurs aléatoires

Proposition

- **Si P_X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et de densité f_X, alors**

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots\ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n.$$

La densité f_X est positive et satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1,$$

et pour tout $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, on a

$$P(X \in D) = \int_D f_X(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

- **De plus, si f_X est continue, alors F_X est *p.s* dérivable et on a**

$$f_X(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial^n F_X}{\partial_{x_1} ... \partial_{x_n}}(x_1, ..., x_n).$$

- **Si X est un vecteur aléatoire absolument continu, alors tout vecteur aléatoire marginal est également absolument continu et sa densité est obtenue en intégrant la densité conjointe de X par rapport aux coordonnées restantes.**

Extensions à des vecteurs aléatoires

Exemple

Si (X, Y) **est un couple aléatoire de densité** $f_{(X,Y)}$**, alors les densités marginales de** X **et** Y **sont données par :**

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy \quad \textbf{et} \quad f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

Théorème

Soit X est un vecteur aléatoire absolument continu. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. **la famille $(X_i)_{i\in[1:n]}$ est une famille de v.a.r indépendantes,**
2. **la fonction de répartition conjointe est le produit des fonctions de répartitions marginales :**

$$F_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i\in[1:n]} F_{X_i}(x_i),$$

3. **la densité conjointe est le produit des densités marginales :**

$$f_X(x_1, ..., x_n) = \prod_{i\in[1:n]} f_{X_i}(x_i).$$



Extensions à des vecteurs aléatoires

Méthode de la fonction muette

Le vecteur $X = (X_1, ..., X_n)$ **est de densité** f_X **ssi pour toute fonction bornée** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$**, on a**

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx_1 ... dx_n,$$

avec $x = (x_1, ..., x_n)$.

Extensions à des vecteurs aléatoires

On a besoin du résultat suivant de changement de variables dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme

Soit φ une bijection continûment différentiable ainsi que son inverse φ^{-1} d'un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert O' de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ intégrable. Alors

$$\int_O f(\varphi(x))g(x)dx_1...dx_n = \int_{O'} f(x)g(\varphi^{-1}(x))\Big|\text{Jac } \varphi^{-1}(x)\Big|dx_1...dx_n.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

Exemple :

Quelle est la loi de $(Z, W) = (X + Y, X - Y)$ sachant que (X, Y) est de densité :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \lambda^2 \exp(-\lambda(x + y))1_{(x>0)}1_{(y>0)}.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

Revenons à notre exemple. On se donne une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et on cherche à mettre $E(g(Z, W))$ sous la forme :

$$E(g(Z, W)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(z, w) f_{(Z,W)}(z, w) dzdw.$$

D'après le théorème de transfert, on a

$$E(g(Z, W)) = E(g(X + Y, X - Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x - y, x + y) f_{(X,Y)}(x, y) dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g(x - y, x + y) \lambda^2 \exp(-\lambda(x + y)) 1_{(x>0)} 1_{(y>0)} dxdy$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(x - y, x + y) \lambda^2 \exp(-\lambda(x + y)) dxdy.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

Pour appliquer le lemme précédent, on pose :
$\varphi(x,y) = (x-y, x+y) = (z,w)$ **et** $O =]0,+\infty[^2$.
Alors

$$\varphi^{-1}(z,w) = \Big(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\Big), \quad |\textbf{Jac } \varphi^{-1}(z,w)| = \frac{1}{2} \text{ et } O' = \{(x,y); x > |y|\}.$$

Par conséquent

$$E(g(Z,W)) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(z,w)\lambda^2 \exp\Big(-\lambda\Big(\frac{z+w}{2}+\frac{z-w}{2}\Big)\Big)\frac{1}{2}dzdw$$

$$= \int_{((z,w);z>|w|)} g(z,w)\frac{\lambda^2}{2}\exp(-\lambda z)dzdw$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g(z,w)\frac{\lambda^2}{2}\exp(-\lambda z)1_{((z,w);z>|w|)}dzdw.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

On conclut que (Z, W) possède la densité :

$$f_{(Z,W)}(z, w) = \frac{\lambda^2}{2} \exp(-\lambda z) 1_{((z,w);z>|w|)}.$$

Finalement, on peut facilement déduire les densités marginales de Z et de W par application des deux formules :

$$f_{(Z)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,W)}(z, w) dw \quad \textbf{et} \quad f_{(W)}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Z,W)}(z, w) dz.$$

Extensions à des vecteurs aléatoires

Application : Densité de la somme de deux v.a indépendantes :

Proposition

Soit X **et** Y **deux v.a indépendantes de densités (resp.)** f_X **et** f_Y**. La densité de** $Z = X + Y$ **est donné par le produit de convolution :**

$$f_Z(z) = f_X * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

Variables aléatoires

Preuve :

Par indépendance de X et Y et le changement de variable : $z = x + y$, on obtient

$$E(g(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) f_X(x) f_Y(y) dxdy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dx \right) dz = \int_{\mathbb{R}} g(z) f_X * f_Y(x) dz.$$

D'où le résultat via la méthode de la fonction muette.

Variables aléatoires

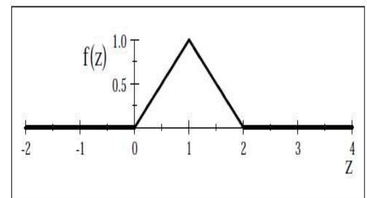
Exemple. Somme de deux v.a.r. indépendantes Uniformes sur $[0,1]$.

Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois Uniformes sur $[0,1]$. On a :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x \notin [0,1] \end{cases} \text{ et } f_Y(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \in [0,1] \\ 0 \text{ si } y \notin [0,1] \end{cases}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^1 f_Y(z-x)dx = \int_z^{z-1} f_Y(u)(-du) = \int_{z-1}^{z} f_Y(u)du,$

$$\text{d'où } f_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0 \text{ si } z \in]-\infty, 0] \\ z \text{ si } z \in]0,1] \\ 2-z \text{ si } z \in]1,2] \\ 0 \text{ si } z \in]2,+\infty[\end{cases}$$



Variables aléatoires

Fonction génératrice des moments

Définition

Soit $X = (X_1, \ldots.., X_n)$ **un vecteur aléatoire à valeurs entières dans** $\mathbb{N}^n$**. La fonction génératrice de** X **est définie pour tout** $s = (s_1, \ldots.., s_n) \in [-1, 1]^n$ **par :**

$$g_X(s) = E(s_1^{X_1} \ldots.. s_n^{X_n}) = \sum_{n=(n_1, \ldots.., n_n) \in \mathbb{N}^n} s_1^{n_1} \ldots.. s_n^{n_n} P(X_1 = n_1, \ldots.., X_n = n_n).$$

Variables aléatoires

Proposition

1. **La série est normalement convergente pour tout** $s = (s_1, ..., s_n) \in [-1, 1]^n$, **et la fonction** g_X **et de classe** C^∞ **sur** $]-1, 1[^n$ **au moins.**
2. **Si on connaît la fonction génératrice du vecteur** X, **on peut en déduire la fonction génératrice de chaque composante** X_i **:**
$$g_{X_i}(s_i) = g_X(s_1, ..., s_n), \text{ avec } s_j = 1 \ \forall j \neq i.$$
3. **Les** $X_1, ..., X_n$ **sont indépendantes ssi pour tout** $s = (s_1, ..., s_n) \in [-1, 1]^n$, **on a**
$$g_X(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s_i).$$

Variables aléatoires

Lois et espérance conditionnelles

Couple de variables discrètes

Définition

Soient X et Y deux v.a.d à valeurs (resp.) dans E et F. Pour $y \in F$, on appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ la famille des nombres

$$(P(X = x|Y = y))_{x \in E}.$$

Variables aléatoires

Remarque

- **Par définition de probabilité conditionnelle, si $P(Y = y) > 0$, alors**

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- **Si X et Y sont indépendantes alors la loi de X sachant $(Y = y)$ ne depend pas de Y, c-à-d $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$.**

Variables aléatoires

- **Formule des probabilités totales :**

$$P(X = x) = \sum_{y \in F} P(X = x | Y = y) P(Y = y)$$

- **Formule de Bayes :**

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(Y = y | X = x) P(X = x)}{\sum_{x \in E} P(Y = y | X = x) P(X = x)}$$

Variables aléatoires

Définition

On appelle espérance conditionnelle de X sachant Y la v.a.d notée $E(X/Y)$ égale à $h(Y)$ où h est la fonction définie par :

$$h(y) = E(X|Y = y) = \sum_{x \in E} xP(X = x|Y = y).$$

$h(y)$ est l'espérance de la v.a X par rapport à sa loi conditionnelle.

Variables aléatoires

Propriétés

- $E(X|X) = X \quad p.s.$
- **Si** X **et** Y **sont indépendants alors** $E(X|Y) = E(X) \quad p.s.$
- **Théorème de l'espérance totale :** $E(E(X|Y)) = E(X)$.
- **Linéarité : Si** $a, b \in \mathbb{R}$ **alors**
  $E(aX_1 + aX_2|Y) = aE(X_1|Y) + bE(X_2|Y) \quad p.s.$

Variables aléatoires

Exemple

Soient $X_1, ..., X_n$ **des v.a i.i.d suivant la loi** $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0, 1[$ **et** $S = X_1 + ... + X_n$ **leur somme. Pour** $s \in [0, n]$, **donner la loi conditionnelle de** X_1 **sachant** $(S = s)$ **et en déduire** $E(X_1|S)$.

Corrigé

Puisque les $X_1, ..., X_n$ **sont i.i.d, on a**

$$E(X_1|S_n) = E(X_2|S_n)..... = E(X_n|S_n).$$

D'autre part, on a

$$S_n = E(S_n|S_n) = E(X_1 + ... + X_n|S_n) = nE(X_1|S_n).$$

Finalement, on trouve que $E(X_1|S_n) = \frac{S_n}{n}$.



Variables aléatoires

Couple de variables aléatoires à densités

Le problème est de généraliser les résultats obtenus dans le cas des v.a.d au cas des v.a.r à densités où l'événement $(Y = y)$ est de probabilité nulle. En particulier, il faut donner un sens à des expressions telles que $E(X|Y = y)$.

Variables aléatoires

définition

- **Densités conditionnelles :**

$$f(y|x) = f_{Y|X=x}(x,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)},$$

$$f(x|y) = f_{X|Y=y}(x,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

- **Espérance conditionnelle $E(Y|X)$ est une v.a (fonction de X) telle que :**

$$E(Y|X=x) = \int_{\mathbb{R}} yf(y|x)dy.$$

Variables aléatoires

Exemple

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues défini sur le domaine D :

$$0 \leqslant X \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant Y \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant X + Y \leqslant 1$$

et de densité $f(x, y) = 2$.

– Loi du couple $f(x, y) = 2$ sur le domaine D et $f(x, y) = 0$ sinon,

– Loi marginale et moments de la variable X :

Densité : $$f_X(x) = 2 \int_0^{1-x} \mathrm{d}y = 2(1-x)$$

Fonction de répartition : $$F_X(x) = 2 \int_0^x (1-x)\,\mathrm{d}x = 2x - x^2$$

$$E(X) = 2 \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x = 1/3 \qquad \mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = 2 \int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = 1/6 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1/18$$

Variables aléatoires

– Loi marginale et moments de la variable Y, résultats analogues :

$$f_Y(y) = 2(1-y) \qquad F_Y(y) = 2y - y^2$$
$$E(Y) = 1/3 \qquad \mathrm{Var}(Y) = 1/18$$

– Loi Y/X et moments conditionnels :

$$f(x, y) = f(y/x)\, f_X(x) \qquad f(y/x) = \frac{1}{1-x}$$
$$E(Y/X=x) = \int_0^{1-x} \frac{y}{1-x}\, dy = \frac{1-x}{2}$$
$$E(Y/X) = \frac{1-X}{2}$$